

## SERIES DE POTENCIAS

1. Calcular el radio de convergencia y el campo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 7^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^{3n}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n 3^n}$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{2} \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{2n}} x^n \quad (f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^{2n+1}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (n+2)}{n+1} x^n \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2n} \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{5/4}}$$

2. Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Hallar el campo de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  y calcular la suma de la serie si  $x = 2$ . Determinar la función suma de la serie de potencias en su campo de convergencia.

4. Hallar el campo de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n} x^n$  y, en este campo, determinar la función suma de la serie de potencias. Calcular la suma de la serie si  $x = \frac{1}{2}$ .

5. Hallar una serie de potencias centrada en  $x_0$  para las siguientes funciones y determinar su campo de convergencia:

$$(a) f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 5 \quad (b) f(x) = \frac{x}{9+x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$(c) f(x) = \frac{3x}{x^2+x-2}, \quad x_0 = 0 \quad (d) f(x) = \frac{5-3x}{1+3x}, \quad x_0 = 0$$

6. Dada la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+3)(n+4)(-3)^n}$ , se pide:

- (a) Hallar su campo de convergencia.  
 (b) Obtener su suma para  $x = -4$ .  
 (c) Determinar la serie de potencias derivada.

7. Sea  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ . Comprobar que los campos de convergencia de  $f$ ,  $f'$  y  $f''$  son, respectivamente, los intervalos  $[-1, 1]$ ,  $[-1, 1)$  y  $(-1, 1)$ .

8. ¿Para qué valores de  $x$  la serie

$$1 - \frac{1}{3}(x-5) + \frac{1}{9}(x-5)^2 - \frac{1}{27}(x-5)^3 + \dots$$

converge? ¿Cuál es su función suma? Derivar término a término. ¿Para qué valores de  $x$  converge la nueva serie y cuál es su función suma?

9. (a) A partir de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , determinar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ,  $|x| < 1$ .

(b) Calcular la suma de las series  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  para  $|x| < 1$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

10. Identificar la función

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Indicación: Derivar término a término.